$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \sqrt{U_0 V_0};\ \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \sqrt{U_0 V_0}}$

Exercice 13

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{\sqrt{1+U_n^2}} \end{cases}$$

1) a/ par récurrence

i) pour $n=0 : 0 \le U_0 = 0 \le 1$ vrai

ii) supposons que $0 \le U_n \le 1$

et montrons que $0 \le U_{n+1} \le 1$

En effet $U_n \ge 0$ donc $\dfrac{U_n}{\sqrt{1+U_n^2}} \ge 0$

d'où $U_{n+1} \ge 0$ Aussi on a:

$$U_{n+1} - 1 = \frac{U_n}{\sqrt{1+U_n^2}} - 1$$

$$= \frac{U_n - \sqrt{1+U_n^2}}{\sqrt{1+U_n^2}} = \frac{U_n^2 - \sqrt{1+U_n^2}^2}{\sqrt{1+U_n^2}\left(U_n - \sqrt{1+U_n^2}\right)}$$

$$= \frac{U_n^2 - \left(1+U_n^2\right)}{\sqrt{1+U_n^2}\left(U_n - \sqrt{1+U_n^2}\right)}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1+U_n^2}\left(U_n - \sqrt{1+U_n^2}\right)}$$

Comme $\sqrt{1+U_n^2}\left(U_n - \sqrt{1+U_n^2}\right) \ge 0$

On aura $U_{n+1} - 1 \le 0$ donc

$U_{n+1} \le 1$ D'où $0 \le U_{n+1} \le 1$

Conclusion:

$\forall n \in \mathbb{N} : 0 \le U_n \le 1$

b/ $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$U_{n+1} - U_n = \frac{U_n}{\sqrt{1+U_n^2}} - U_n = U_n\left(\frac{1}{\sqrt{1+U_n^2}} - 1\right)$$

On sait que $1 + U_n^2 \ge 1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+U_n^2} \ge 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+U_n^2}} \le 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+U_n^2}} - 1 \le 0$$

et comme $U_n \ge 0$ on aura: $U_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+U_n^2}} - 1\right) \le 0$

Ce qui donne $U_{n+1} - U_n \le 0$ d'où (U_n) est une Suite décroissante.

c/ (U_n) est une suite décroissante et minorée par 0 d'où (U_n) est convergente posons $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell$

On a : $f(U_n) = U_{n+1}$ et f continue en

$\ell \in [0,1] \subset \mathbb{R}$ puisque $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

est continue sur $\mathbb{R}$.

Donc $f(\ell) = \ell \Leftrightarrow \dfrac{\ell}{\sqrt{1+\ell^2}} = \ell \Leftrightarrow \dfrac{\ell^2}{1+\ell^2} = \ell^2$

$$\Leftrightarrow \frac{\ell^2}{1+\ell^2} - \ell^2 = 0 \Leftrightarrow \ell^2\left(\frac{1}{1+\ell^2} - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ell^2\left(\frac{1-1-\ell^2}{1+\ell^2}\right) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\ell^4}{1+\ell^2} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\ell = 0}$$

Donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0}$

2) $V_n = \dfrac{1}{U_n^2}, n \in \mathbb{N}$

a/ $V_{n+1} = \dfrac{1}{U_{n+1}^2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{U_n}{\sqrt{U_{n+1}^2}}\right)^2}$

$$V_{n+1} = \frac{1}{\dfrac{U_n^2}{1+U_n^2}} = \frac{1+U_n^2}{U_n^2} = \frac{1}{U_n^2} + 1$$

$$V_{n+1} = 1 + V_n$$

Donc (V_n) est une suite arithmétique de raison $r = 1$

b/ */ on a : $V_n = V_0 + nr$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn